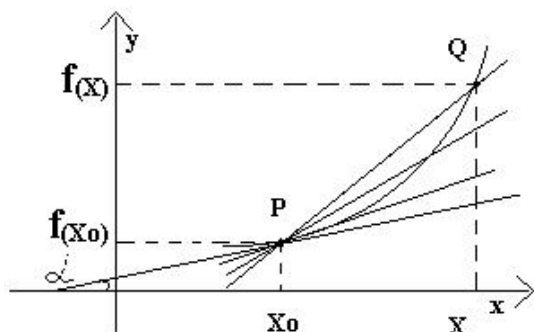


# DIFERENCIÁLNY POČET FUNKCIE JEDNEJ REÁLNEJ PREMENNEJ

## 1. Derivácia funkcie a jej vlastnosti

Pojem derivácie vznikol v 17. storočí pri riešení fyzikálnych úloh (Isaac Newton: rýchlosť priamočiara sa pohybujúceho telesa je derivácia dráhy podľa času  $v(t_0) = \frac{ds}{dt}$ ) a pri riešení úloh v geometrii - zavedenie pojmu dotýčnice ku grafu funkcie (Ak sa bod Q blíži k bodu P, t.j.  $x-x_0 = h \rightarrow 0$ , priamka - sečnica sa blíži ku limitnej polohe priamky - dotýčnici).



Všade tam, kde chceme vypočítať zmenu nejakej veličiny, a to v akomkoľvek vednom alebo technickom obore, sa objavuje limita v tvare  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$  (napríklad rýchlosť chemickej reakcie v istom čase alebo marginálne náklady v ekonómii). Keďže tento typ limity sa objavuje veľmi často, dostala špeciálne meno a označenie:

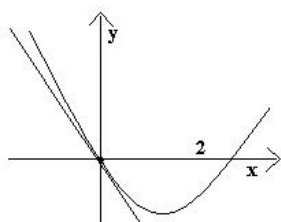
**Def.:**

Nech funkcia  $f$  je definovaná v bode  $x_0$  a v nejakom jeho okolí.

**Deriváciou** funkcie  $f$  v bode  $x_0$  nazývame  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ , ak táto limita existuje.

Ozn.  $\frac{df(x_0)}{dx}$  alebo  $f'(x_0)$ .

**Pr.** Vypočítajte deriváciu funkcie  $f(x) = x^2 - 2x$  v bode  $x_0 = 0$  podľa definície :



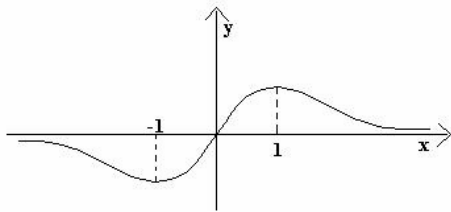
$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x-2)}{x}$$

$$f'(x_0 = 0) = -2$$

□

**Pr.** Vypočítajte deriváciu funkcie  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$  v bode  $x_0 = 0$  podľa definície.

Riešenie:



$$f'(x_0 = 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{1+x^2}}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x^2} = 1 = \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

Vypočítali sme, že derivácia t.j. smernica dotyčnice je 1, čiže dotyčnica zvierá s x-ovou osou uhol  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ . □

Ak platí  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \infty$  alebo  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$ , hovoríme, že funkcia  $f$  má v bode  $x_0$  **nevlastnú deriváciu**. Ak je funkcia  $f$  v bode  $x_0$  spojitá, potom jej graf má dotyčnicu rovnobežnú s osou  $x$ , t.j.  $x = x_0$  je rovnica dotyčnice.

Funkcia  $f$ , ktorá má v bode  $x_0$  deriváciu  $f'(x_0)$ , sa nazýva **diferencovateľná v bode  $x_0$** .

Ak existuje  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_+(x_0)$  resp.  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_-(x_0)$ , nazýva sa **deriváciou sprava** funkcie  $f$  v bode  $x_0$  (resp. **deriváciou zľava**).

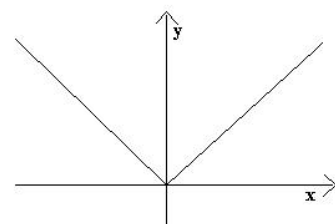
**VEŤA 1:** Funkcia  $f$  má v bode  $x_0$  deriváciu vtedy a len vtedy, keď existujú  $f'_+(x_0)$ ,  $f'_-(x_0)$  a platí:  $f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$

**Pr.** Dokážte, že funkcia  $f(x) = |x|$  nemá v bode  $x_0 = 0$  deriváciu.

Riešenie:

$$f'(x_0 = 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$$

$$\left. \begin{aligned} f'_+(x_0 = 0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1 \\ f'_-(x_0 = 0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'_+(0) > f'_-(0)$$



**VETA 2: (nutná podmienka existencie derivácie)**

Ak má funkcia  $f$  v bode  $x_0$  deriváciu, potom je v bode  $x_0$  spojitá .

Táto podmienka je nutná podmienka. Nie je to postačujúca podmienka, pretože z predchádzajúceho príkladu vidno, že funkcia je spojitá, no nemá deriváciu v bode  $x_0=0$ .

**2. Geometrický a fyzikálny význam derivácie**

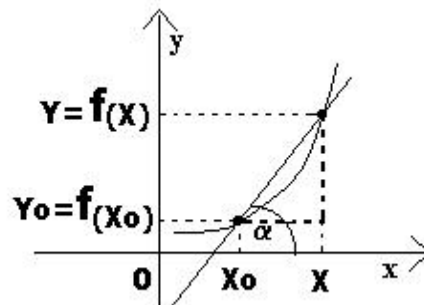
Funkcia  $f$  má deriváciu v bode  $x_0$ , ak existuje limita podielu  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ .

Ak si zvolíme na grafe funkcie  $f$  bod  $P = [x_0, f(x_0)]$ ,

potom podiel  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \operatorname{tg} \alpha$  je smernicou

priamky určenej bodmi  $[x_0, f(x_0)]$  a  $[x, f(x)]$ .

Ak zmeňujeme rozdiel  $x - x_0$ , tj. ak  $x \rightarrow x_0$ , mení sa priamka, ktorá je sečnicou grafu funkcie  $f$ , na dotýčnicu ku grafu tejto funkcie v bode  $x_0$ .



Takto dostávame  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \operatorname{tg} \alpha$ . Teda derivácia funkcie  $f$  v bode  $x_0$  je smernica dotýčnice ku grafu funkcie  $f$  v bode  $P = [x_0, f(x_0)]$ .

Rovnicu tejto dotýčnice môžeme napísať v tvare:  $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

**ROVNICA DOTYČNICE** t:  $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

**ROVNICA NORMÁLY** n:  $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$

**Pr.**: Nájdiť rovnicu dotýčnice a normály ku grafu funkcie  $f: y = x^2 - x + 1$  v bode  $A = [1, 1]$ .

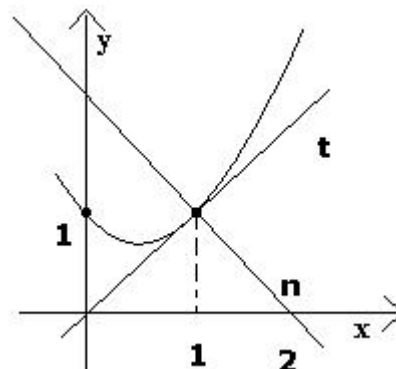
Riešenie:  $f'(x_0=1) = 2x - 1 = 1$

t:  $y - 1 = 1(x - 1)$

n:  $y - 1 = -\frac{1}{1}(x - 1)$

t:  $y = x$

n:  $y = 2 - x$



□

**Pr:** Nájdiť rovnicu dotyčnice a normály ku grafu funkcie  $y = \frac{e^x}{2} + 1$  ak  $t \parallel p$ .

Riešenie:

$$p: x - 2y + 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

$$f'(x_0) = \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x_0 = 0$$

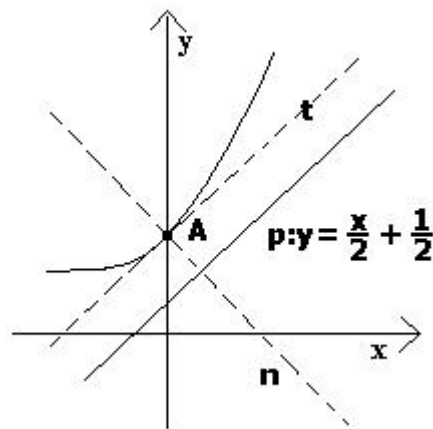
bod dotyku:  $A = \left[ 0, \frac{3}{2} \right]$

$$t: y - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} x$$

$$n: y - \frac{3}{2} = -2x$$

$$t: y = \frac{x}{2} + \frac{3}{2}$$

$$n: y = -2x + \frac{3}{2}$$



□

Nech sa teleso pohybuje po priamke a nech pre jeho polohu v čase  $t$  platí  $y = f(t)$ .

Hovoríme tiež, že  $y = f(t)$  je rovnica dráhy daného telesa.

Úlohou je určiť okamžitú rýchlosť telesa v čase  $t_0$ . Pretože  $f(t) - f(t_0)$  je dráha, ktorú prejde teleso v časovom intervale  $\langle t_0, t \rangle$ , vyjadruje vzťah  $\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$  priemernú rýchlosť telesa

v čase od  $t_0$  po  $t$ . Čím menší bude časový úsek  $\langle t_0, t \rangle$ , tým presnejšie daný výraz aproximuje okamžitú rýchlosť telesa v čase  $t_0$ .

Potom  $f'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$  považujeme za okamžitú rýchlosť telesa v čase  $t_0$ .

Hovoríme tiež, že **rýchlosť je deriváciou dráhy**.

Podobne, zmena rýchlosti v čase sa vyjadruje zrýchlením. Hovoríme, že **zrýchlenie je deriváciou rýchlosti**.

**Pr:** Priamočiary pohyb telesa je určený rovnicou  $s = 7t^2 + 5t$ . Určte jeho rýchlosť a zrýchlenie v čase  $t_0 = 1$ .

Riešenie:

a) rýchlosť:  $v = \frac{ds}{dt}(t_0 = 1) = 14t + 5 = 19$

b) zrýchlenie:  $a = \frac{dv}{dt}(t_0 = 1) = 14$

□

### 3. Základné pravidlá derivovania

**VETA 3:** Nech  $f_1, f_2$  majú v bode  $x_0$  deriváciu. Potom aj funkcia  $F = c_1 f_1 + c_2 f_2$  ( $c_1, c_2$  sú ľubovoľné konšt.) má v bode  $x_0$  deriváciu a platí:  $F'(x_0) = c_1 f_1'(x_0) + c_2 f_2'(x_0)$

Dôkaz: Funkcie  $f_1, f_2$  majú derivácie v bode  $x_0$  :

$$f_1'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x) - f_1(x_0)}{x - x_0}, \quad f_2'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_2(x) - f_2(x_0)}{x - x_0}$$

Pre funkciu  $F = c_1 f_1 + c_2 f_2$  platí:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) - c_1 f_1(x_0) - c_2 f_2(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{c_1(f_1(x) - f_1(x_0))}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{c_2(f_2(x) - f_2(x_0))}{x - x_0} = c_1 f_1'(x_0) + c_2 f_2'(x_0) \end{aligned}$$

□

**VETA 4:** Ak majú funkcie  $u, v$  deriváciu v bode  $x_0$ , potom aj funkcia  $F = u \cdot v$  má deriváciu v  $x_0$  a platí  $F'(x_0) = u'(x_0) \cdot v(x_0) + u(x_0) \cdot v'(x_0)$

Dôkaz: Funkcie  $u(x), v(x)$  majú deriváciu v bode  $x_0$  :

$$u'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0}, \quad v'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0}$$

Pre funkciu  $F = u(x) \cdot v(x)$  platí :

$$\begin{aligned} (u \cdot v)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x) \cdot v(x) - u(x_0) \cdot v(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x) \cdot v(x) + v(x) \cdot u(x_0) - v(x) \cdot u(x_0) - u(x_0) \cdot v(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{[u(x) - u(x_0)]v(x) + [v(x) - v(x_0)]u(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} v(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0} u(x_0) = \\ &= u'(x_0) \cdot v(x_0) + u(x_0) \cdot v'(x_0) \end{aligned}$$

□

**VETA 5:** Ak majú funkcie  $u, v$  deriváciu v bode  $x_0$  a  $x_0 \neq 0$ , potom funkcia:  $F = \frac{u}{v}$

má v bode  $x_0$  deriváciu a platí:  $F'(x_0) = \frac{u'(x_0).v(x_0) - u(x_0).v'(x_0)}{[v(x_0)]^2}$

Dôkaz:

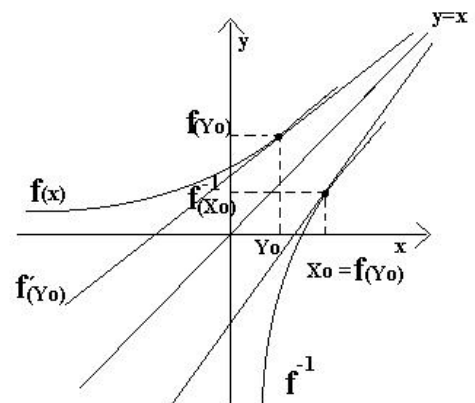
$$\begin{aligned} \left(\frac{u}{v}\right)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{u(x)}{v(x)} - \frac{u(x_0)}{v(x_0)}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x).v(x_0) - v(x).u(x_0)}{v(x).v(x_0).(x - x_0)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{[u(x) - u(x_0)]v(x_0) - [v(x) - v(x_0)]u(x_0)}{v(x).v(x_0).(x - x_0)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[ \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} \cdot \frac{v(x_0)}{v(x).v(x_0)} - \frac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0} \cdot \frac{u(x_0)}{v(x).v(x_0)} \right] = \frac{u'(x_0).v(x_0) - u(x_0).v'(x_0)}{v^2(x_0)} \quad \square \end{aligned}$$

**VETA 6:** (o derivácii inverznej funkcie):

Nech  $f$  je rýdzo monotónna a spojitá na intervale  $(a, b)$  a nech má v bode  $y_0 \in (a, b)$  deriváciu  $f'(y_0) \neq 0$ . Potom k nej inverzná funkcia  $f^{-1}$  má deriváciu v odpovedajúcom bode  $x_0 = f(y_0)$

a platí:  $f^{-1}'(x_0) = \frac{1}{f'(y_0)}$

**Dôkaz:** Z predpokladu platí  $f'(y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0}$



Potom :

$$f^{-1}'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)}{x - x_0} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{y - y_0}{f(y) - f(y_0)} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{1}{\frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0}} = \frac{1}{f'(y_0)} \quad \square$$

**VETA 7:** ( o derivácií zloženej funkcie)

Nech má funkcia  $\varphi(x)=u$  deriváciu v bode  $x_0$  a funkcia  $f(u)=f(\varphi(x))$  deriváciu v bode  $u_0=\varphi(x_0)$ . Potom aj zložená funkcia  $F(x)=f(\varphi(x))$  má deriváciu v bode  $x_0$  a platí:  $F'(x_0)=f'(\varphi(x_0)).\varphi'(x_0)$

VETA 8:

- Nech  $f(x) = c$  pre  $x \in \mathbb{R}$ . Potom  $f'(x) = [c]' = 0$ .
- Nech  $f(x) = x^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Potom  $f'(x) = [x^n]' = nx^{n-1}$  na intervale  $(-\infty, \infty)$
- Nech  $f(x) = x^n$ ,  $n \in \mathbb{R}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Potom  $f'(x) = [x^n]' = nx^{n-1}$  na intervale  $(0, \infty)$ .

VETA 9: Nech  $f(x) = \sin x$ ,  $g(x) = \cos x$ . Potom:

- $f'(x) = [\sin x]' = \cos x$
- $g'(x) = [\cos x]' = -\sin x$ , pre  $x \in (-\infty, \infty)$ .

Dôkaz: Nech  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} [\sin x]' &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \lim_{\ln \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0 + \ln) - \sin x_0}{\ln} = \lim_{\ln \rightarrow 0} \frac{\sin x_0 \cdot \cos \ln + \cos x_0 \cdot \sin \ln - \sin x_0}{\ln} = \\ &= \lim_{\ln \rightarrow 0} \frac{\sin x_0 (\cos \ln - 1) + \cos x_0 \sin \ln}{\ln} = \lim_{\ln \rightarrow 0} \frac{\cos x_0 \sin \ln - \sin x_0 (1 - \cos \ln)}{\ln} = \cos x_0 \end{aligned}$$

Pretože  $x_0$  bolo ľubovoľné číslo z  $(-\infty, \infty)$ , dôkaz platí pre všetky reálne čísla.

Podobne sa dokáže  $[\cos x]' = -\sin x$

□

VETA 10: Nech  $f(x) = \operatorname{tg} x$ ,  $g(x) = \operatorname{cotg} x$ . Potom:

- $f'(x) = [\operatorname{tg} x]' = \frac{1}{\cos^2 x}$  pre  $x = (2k+1)\pi/2$ ,  $k \in \mathbb{Z}$
- $g'(x) = [\operatorname{cotg}(x)]' = -\frac{1}{\sin^2 x}$  pre  $x = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

VETA 11: Nech  $f(x) = \arcsin x$ ,  $g(x) = \arccos x$ . Potom:

- $f'(x) = [\arcsin x]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  pre  $x \in (-1, 1)$
- $g'(x) = [\arccos x]' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  pre  $x \in (-1, 1)$ .

VETA 12: Nech  $f(x) = \operatorname{arctg} x$ ,  $g(x) = \operatorname{arccotg} x$ . Potom:

- $f'(x) = [\operatorname{arctg} x]' = \frac{1}{1+x^2}$  pre  $x \in (-\infty, \infty)$
- $g'(x) = [\operatorname{arccotg} x]' = -\frac{1}{1+x^2}$  pre  $x \in (-\infty, \infty)$ .

Dôkaz: Funkcia  $f(x)=\arctg x$  je inverzná ku funkcií  $x=\operatorname{tg} y$ , ktorá je monotónna a na  $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$  má deriváciu  $[\operatorname{tgy}]' = \frac{1}{\cos^2 y}$ .

Potom podľa VETY 6 ( o derivácií inverznej funkcie ) platí:

$$f'(x) = [\arctg x]' = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

Podobne sa dokáže pre  $\operatorname{arc} \operatorname{cotg} x$ .

□

VETA 13: Nech  $f(x)=\ln x$ ,  $x>0$  . Potom  $f'(x) = [\ln x]' = \frac{1}{x}$  na intervale  $(0, \infty)$ .

VETA 14: Nech  $f(x) = a^x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ . Potom  $[a^x]' = a^x \ln a$  pre  $x \in \mathbb{R}$ .

Špeciálne :  $(e^x)' = e^x$

VETA 15 : (o logaritmickom derivovaní)

Nech  $f(x)$ ,  $g(x)$  majú derivácie pre  $\forall x \in (a, b)$  a nech  $f(x) > 0$  na  $(a, b)$ . Potom:

$$[f^g]' = [e^{g(x) \cdot \ln f(x)}]' = [f(x)]^{g(x)} \left[ g'(x) \cdot \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) \right]$$